Einführung in die PDGs
05.04.2019
Prof. Dr. H. Koch
Dr. F. Gmeineder
Abgabe: 12.04.2019 in der Vorlesung

universitätbonn

Übungsblatt 1

Aufgabe 1: **5 + 5 = 10 Punkte**

(a) Zeigen Sie, dass die Funktion $f(z) := \exp(\mathrm{i}\, z)$ komplex differenzierbar ist und konstruieren Sie, darauf aufbauend, harmonische Funktionen, indem Sie den Real- und Imaginärteil betrachten.

(b) Beweisen Sie den Fundamentalsatz der Algebra: *Jedes Polynom vom Grade $k \geq 1$ mit komplexen Koeffizienten besitzt in $\mathbb{C}$ eine Nullstelle.*

Nehmen Sie hinsichtlich eines Widerspruchs an, der Fundamentalsatz gelte nicht. Konstruieren Sie dann harmonische Funktionen, auf die Sie den Satz von Liouville anwenden können.

Aufgabe 2: **4 + 6 = 10 Punkte**

Sei $d \in \mathbb{N}_{\geq 1}$. Bestimmen Sie die Dimension des Raumes der harmonischen Polynome auf $\mathbb{R}^d$ vom Grade

(i) $k = 2$,

(ii) $k = 3$,

d.h.

$$\dim\Big((a_\alpha)_{|\alpha|\leq k}\colon\ \Delta\Big(\sum_{|\alpha|\leq k} a_\alpha x^\alpha\Big) = 0\Big).$$

Hierbei verwenden wir die gewöhnliche Multiindexnotation aus der Analysis 2.

Aufgabe 3: **10 Punkte**

Sei $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ eine offene Menge und sei $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass für alle $u \in \mathrm{C}^k(\overline{\Omega})$, alle $\varphi \in \mathrm{C}_0^k(\Omega)$ und Multiindices $\alpha \in \mathbb{N}^d$ mit $|\alpha| \leq k$ gilt:

$$\int_\Omega (\partial^\alpha u)\varphi \,\mathrm{d}x = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega u(\partial^\alpha \varphi)\,\mathrm{d}x.$$

Hierbei notiert $\mathrm{C}^k(\overline{\Omega})$ den Raum der k-fach stetig differenzierbaren Funktionen, deren partielle Ableitungen bis zum Grad k alle stetig auf $\overline{\Omega}$ fortgesetzt werden können. Schlussfolgern Sie, dass in der obigen Situation gilt

$$\int_\Omega \partial^\alpha \varphi \,\mathrm{d}x = 0 \qquad \text{für alle } \alpha \in \mathbb{N}^d \text{ mit } 1 \leq |\alpha| \leq k.$$

Bitte wenden ⟶

Aufgabe 4: **10 Punkte**

Es besitze die beschränkte und offene Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ einen C^1-Rand, wobei $d \geq 2$. Zeigen Sie, dass für alle $u, v \in \mathrm{C}^2(\overline{\Omega})$ gilt:

$$
\begin{aligned}
&\text{(i)} && \int_\Omega (\Delta u)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{d-1}, \\
&\text{(ii)} && \int_\Omega (\Delta u) v\,\mathrm{d}x + \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{d-1}, \\
&\text{(iii)} && \int_\Omega (v\Delta u - u\Delta v)\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} \Big(\frac{\partial u}{\partial \nu} v - \frac{\partial v}{\partial \nu} u\Big)\,\mathrm{d}\mathcal{H}^{d-1}.
\end{aligned}
$$

Hierbei bezeichnet $\nu\colon \partial\Omega \to \mathbb{S}^{d-1}$ die äußere Einheitsnormale an $\partial\Omega$ und $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ die Richtungsableitung von u in Richtung ν (und analog für v).