Analysis 2

26.04.2018
PROF. DR. H. KOCH
DR. F. GMEINEDER
Abgabe: 03.05.2018 in der Vorlesung

Übungsblatt 3

Aufgabe 1: **10 Punkte**

Sei X eine Menge und d die diskrete Metrik auf X. Zeigen Sie, dass eine Menge $A \subset X$ genau dann kompakt bezüglich d ist, wenn A endlich ist.

Aufgabe 2: **4+4+4+4+4 = 20 Punkte**

Ist (X, d) ein metrischer Raum und $B \subset X$ eine Teilmenge, so nennen wir B *(prä)kompakt*, falls (B, d) als metrischer Raum (prä)kompakt ist. Weiters nennen wir für eine Teilmenge $A \subset X$ eine Menge $B \subset A$ *offen in* A, falls B offen im metrischen Raum (A, d) ist. Zeigen Sie das Folgende:

(i) Ist (X, d) ein metrischer Raum und sind $K_1, ..., K_N \subset X$ endlich viele kompakte Mengen, so ist $\bigcup_{i=1}^{N} K_i$ ebenfalls kompakt.

(ii) Ist (X, d) ein metrischer Raum und ist $(K_i)_{i \in I}$ eine beliebige Familie kompakter Teilmengen von X, so ist $\bigcap_{i \in I} K_i$ kompakt.

(iii) Ein metrischer Raum (X, d) ist genau dann kompakt, wenn er vollständig und präkompakt ist.

(iv) Ist (X, d) ein vollständiger metrischer Raum, so ist $A \subset X$ genau dann präkompakt, falls $\overline{A}$ kompakt ist.

(v) Ist (X, d) ein metrischer Raum und $A \subset X$, so ist $B \subset A$ offen in A genau dann, wenn es eine offene Menge $U \subset X$ gibt mit $B = A \cap U$.

Aufgabe 3: **10 Punkte**

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Eine Familie von Teilmengen $\{A_i \colon\ i \in I\}$ heiße *zentriertes System*, falls alle A_i abgeschlossen sind und für jede *endliche Teilmenge* $I_0 \subset I$ gilt: $\bigcap_{i \in I_0} A_i \neq \emptyset$. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

(a) (X, d) ist ein kompakter metrischer Raum.

(b) Für jedes zentrierte System $\{A_i \colon\ i \in I\}$ gilt $\bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$.

Aufgabe 4: **10 Punkte**

Sei ℓ^2 wie in Übungsblatt 2 definiert. Zeigen Sie, dass $\overline{\mathrm{B}}_1(0) := \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2 \colon\ \|(a_n)_{n \in \mathbb{N}}\|_2 \leq 1\}$ nicht kompakt ist bezüglich $\|\cdot\|_2$, jedoch $\mathcal{B} := \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^2 \colon\ |a_n| \leq \frac{1}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}\}$ in der Tat kompakt ist bezüglich $\|\cdot\|_2$.

Aufgabe 5: **10 Punkte**

Finden Sie $A, B \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$, sodass $\exp(A+B) \neq \exp(A)\exp(B)$ und begründen Sie Ihre Antwort.

HELPDESK ZUR ANALYSIS 2: MONTAGS, 13-16 UHR & DONNERSTAGS, 10-13 UHR, RAUM N1.002, ENDENICHER ALLEE 60 (NEBENGEBÄUDE, 1. STOCK)