Analysis 2

19.04.2018
Prof. Dr. H. Koch
Dr. F. Gmeineder
Abgabe: 26.04.2018 in der Vorlesung

universitätbonn

Übungsblatt 2

Aufgabe 1: **10 Punkte**

Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass für alle $A \subset X$ gilt

$$\overline{A} = \{x \in X\colon\ d(x, A) = 0\}.$$

Hierbei notiert für $x \in X$ wie in der Vorlesung $d(x, A) := \inf\{d(x, y)\colon\ y \in A\}$ den *Abstand von x zu A*.

Aufgabe 2: **10 Punkte**

Wir nennen eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *partiell stetig* in einem Punkt $(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ genau dann, wenn für jedes $k \in \{1, ..., n\}$ die Abbildung $g^{(k)}\colon \mathbb{R} \ni x \mapsto f(x_1, ..., x_{k-1}, x, x_{k+1}, ..., x_n)$ in x_k stetig ist. Zeigen Sie, dass eine in einem Punkt stetige Funktion in diesem Punkt partiell stetig ist, aber die Umkehrung im Allgemeinen *nicht* gilt.
Bonusaufgabe: Angenommen, man nennt eine Funktion $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ partiell stetig, wenn sie in jedem Punkt partiell stetig ist. Zeigen oder widerlegen Sie, ob dann f notwendigerweise stetig ist.

Aufgabe 3: **4 + (2+2+2) + (2+2+1) + 1 + 4 = 20 Punkte**

Es notiere für $1 \leq p < \infty$

$$\ell^p := \left\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\colon\ a_n \in \mathbb{R} \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } \|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_p := \left(\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^p\right)^{\frac{1}{p}} < \infty\right\}$$

$$\ell^\infty := \left\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\colon\ a_n \in \mathbb{R} \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und } \|(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\|_\infty := \sup_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < \infty\right\},$$

$$c_{00} := \left\{(a_n)_{n\in\mathbb{N}}\colon\ a_n \in \mathbb{R} \text{ für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und es existiert } N \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq N \Rightarrow a_n = 0\right\}.$$

(a) Wir definieren für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2$

$$\langle (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \rangle := \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n.$$

Zeigen Sie, dass $\langle (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \rangle$ dann wohldefiniert ist und ein Skalarprodukt auf ℓ^2 definiert. Begründen Sie, dass die Norm auf ℓ^2 von diesem Skalarprodukt induziert wird.

(b) Zeigen Sie, dass $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ für $p \in \{1, 2, \infty\}$ jeweils ein Banachraum ist.

(c) Bestimmen Sie mit Beweis jeweils den Abschluss von c_{00} in $(\ell^p, \|\cdot\|_p)$ für $p \in \{1, 2, \infty\}$.

(d) Bestimmen Sie für jedes $p \in [1, \infty)$ mit Beweis den Abschluss von ℓ^p in ℓ^∞ bezüglich der Norm $\|\cdot\|_\infty$.

(e) Sei $1 \leq p \leq \infty$. Zeigen Sie, dass die Identität $\mathrm{id}\colon (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mapsto (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stetig ist als Abbildung $\mathrm{id}\colon \ell^p \to \ell^\infty$.

Aufgabe 4: **10 Punkte**

Es sei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein reeller Banachraum und $A\colon X \to X$ eine lineare Abbildung mit $\|A\| < 1$, wobei $\|A\|$ die Operatornorm von A ist.

(a) Zeigen Sie, dass für jedes $f \in X$ die Gleichung $x - Ax = f$ eine eindeutige Lösung $x \in X$ besitzt.

(b) Sei $g \in \mathrm{C}_b([0, \frac{1}{2}])$. Zeigen Sie weiters, dass die Integralgleichung

$$1 + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = f - g$$

eine eindeutige Lösung $f \in C_b([0, \frac{1}{2}])$ besitzt.